数理解析研究所講究録
1160巻 2000年 1-6


# 三重ゼータ関数の和の漸近展開について

富山大・工・江上繁樹 (Shigeki EGAMI)
megami@eng.toyama-u.ac.jp

$\alpha>0$, $0<u,v<1$, $w>3$ とする. 級数

$$\zeta_3(u,v,w;\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(\alpha+m)^{-u}(\alpha+m+n)^{-v}(\alpha+m+n+l)^{-w}$$

は絶対収束する. $q\in\mathbb{N}$ に対し

$$J_3(u,v,w;q)=\sum_{a=1}^{q}\zeta_3(u,v,w;\tfrac{a}{q})$$

の $q\to\infty$ のときの漸近的挙動について考えたい.

<u>Proposition.</u> 任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して

$$J_3(u,v,w;q)=\frac{\Gamma(1-u)}{\Gamma(v)\Gamma(w)}q\cdot I(u,v,w)$$
$$+\sum_{n=0}^{N}(-1)^n C_n(v,w)\zeta(u-n)\frac{q^{u-n}}{n!}+O(q^{u-N-1}),$$

ただし,

$$I(u,v,w)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{z^{w-1}}{e^z-1}\frac{y^{v-1}}{e^{y+z}-1}(y+z)^{u-1}\,dy\,dz$$

$$C_n(u,v) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\Gamma(v+n-k)\Gamma(w+k)\Gamma(u-n)}{\Gamma(v)\Gamma(w)\Gamma(u)} \zeta_2(v+n-k, w+k)$$

$$\zeta_2(v,w) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{-v}(m+n)^{-w}.$$

証明のアウトライン

Riemann ゼータ関数の解析接続のやり方と同じく

$$\Gamma(u)\Gamma(v)\Gamma(w)\zeta_3(u,v,w;\alpha)$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^{u-1} y^{v-1} z^{w-1} \frac{e^{-\alpha(x+y+z)}}{1-e^{-(x+y+z)}} \cdot \frac{1}{e^{y+z}-1} \cdot \frac{1}{e^{z}-1}\, dx\,dy\,dz$$

を得る. したがって容易な計算により

$$J_3(u,v,w;g) = \frac{g^u}{\Gamma(u)\Gamma(v)\Gamma(w)} \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{z^{w-1}}{e^{z}-1} \frac{y^{v-1}}{e^{y+z}-1} \frac{x^{u-1}}{e^{x+\frac{y+z}{g}}} \times$$

$$dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{g^u}{\Gamma(u)\Gamma(v)\Gamma(w)} \cdot \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{z^{w-1}}{e^{z}-1} \frac{y^{v-1}}{e^{y+z}-1} \frac{x^{u-1}}{x+\frac{y+z}{g}}\, dx\,dy\,dz$$

$$+ \frac{g^u}{\Gamma(u)\Gamma(v)\Gamma(w)} \cdot \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{z^{w-1}}{e^{z}-1} \frac{y^{v-1}}{e^{y+z}-1} x^{u-1} h\left(x+\frac{y+z}{g}\right) dx,$$

ただし. $h(A) = \dfrac{1}{e^A-1} - \dfrac{1}{A}$ とおいた.

さて、第1項は

$$\frac{\Gamma(1-u)}{\Gamma(v)\Gamma(w)}\cdot I(u,v,w)\,\varrho^{u}$$

となることが、若干の計算の後、わかるし、第二項に $h(p)$ の Taylor展開

$$h\left(x+\frac{y+z}{\varrho}\right)=\sum_{n=0}^{N}\frac{h^{(n)}(x)}{n!}\varrho^{-n}(y+z)^{n}+R_N$$

を代入し、$(y+z)^n$ を2項展開すると、第二項は

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\varrho^{u-n}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{z^{w+k-1}}{e^{z}-1}\frac{y^{v+n-k-1}}{e^{y+z}-1}\,dy\,dz\cdot\int_0^\infty x^{u-1}h^{(n)}(x)\,dx$$

となる。ところが

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{z^{w+k-1}}{e^{z}-1}\frac{y^{v+n-k-1}}{e^{y+z}-1}\,dy\,dz=\Gamma(v+n-k)\Gamma(w+k)\zeta_2(v+n-k,w+k)$$

であり、また、$0<u<1$ のとき

$$\int_0^\infty x^{u-1}h^{(n)}(x)\,dx=(-1)^n\Gamma(u-n)\zeta(u-n)$$

となる。残余項の積分から $\varrho^{u-N-1}$ が出ることは Katsurada－Matsumoto [4] と同様にわかる。

（証明終り）

この問題の由来とその後の発展について、簡単に述べておく。Motohashi [6] および Katsurada-Matsumoto [4] は、Heath-Brown [2] による

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| L\left(\tfrac{1}{2}, \chi\right) \right|^2 \qquad (1)$$

の $q$ の増加による漸近展開を新しい手法を用いて精密化、一般化した。そこでは二重ゼータ関数に関する同様な和

$$\sum_{a=1}^{q} \zeta_2\left(u, v; \frac{a}{q}\right) \qquad (2)$$

の漸近展開が本質的であった。$u, v$ はあとで $\frac{1}{2} + \sqrt{-1}\mathbb{R}$ 上に持ってくるため解析接続しておかなければならないが、二重ゼータの場合では、これが可能である。三重ゼータの場合（より一般にも）解析接続そのものはできるのであるが、上の Motohashi, Katsurada-Matsumoto とは別の方法であって、そこから $0 < \mathrm{Re}\, w < 1$ に対して命題のようなことが言えるわけではない。

ところで、(2) を扱うのには、Mellin-Barnes 積分を用いた Katsurada [3] の別証明があり、本研究集会で、松本耕二氏は、この手法を多重化して、多重ゼータの解析接続の別証を見出した [5]。その後、筆者と松本氏は、多重 Mellin-Barnes 積分を用いる新しい方法で、Motohashi, Katsurada-Matsumoto の結果の三重、より一般に $r$ 重ゼータ関数への一般化に成功した [1]。したがって、命題は $u, v, w$ が実部が $0$ と $1$ の間にある複素数のときにも成立する。

その際にあらわれる複雑な多重積分が、実は多重ゼータ($C_n(u,w)$に相当する)であることは、命題との比較から形を予測したのであった。そういうわけで、この命題は最終的な結果を得る指針とはなったが、その証明には寄与していない。もちろん、結果が得られた以上、ここに書いた方法(それは元来のMotohashi, Katsurada-Matsumotoの方針であるが)で同じ結果を得ることもできそうであるが、未だできていない。

最後に一つ注意しておくと、(2)が一般化されたからといって、(1)の一般化

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| L\left(\tfrac{1}{2}, \chi\right) \right|^{2r} \qquad (3)$$

の漸近的挙動について、新しい知見が得られるわけではない。ただ、その見かけ上の"dual"

$$\sum_{a=1}^{q} \left| \zeta\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{a}{q}\right) \right|^{2r} \qquad (4)$$

の$q$展開はできる見通しがついている。$r=1$のときは(3)、と(4)はほぼ同じ困難さなのであるが、$r \geq 2$のときは(3)の方がはるかに深い問題のようである。実際、(4)の上からの評価は簡単にできるのに対し、(3)の方は指標和のような本質的に数論的な量が関係してくるので、上からの評価すら未解決の問題をふくんでいる。

# 文 献

[1] S. Egami, K. Matsumoto, in preparation.

[2] D. R. Heath-Brown, Comment. Math. Helv. 56 (1981), 148–161.

[3] M. Katsurada, Lithuanian Math. J. 38 (1998), 77–88.

[4] M. Katsurada, K. Matsumoto, Math. Z. 208 (1991), 23–39.

[5] K. Matsumoto, preprint.

[6] Y. Motohashi, Proc. Japan Acad. 61A (1985) 222–224.